مدل رشد درونزاي دو بخشي

دكترمحمد هادي زاهدي‌وفا*

مترجم: مرتضي بكي حسكوئي **

چکیده: *در این مقاله یک مدل رشد درونزای دو بخشی ارایه می گردد یک بخش با تکنولوژی بالا و یک بخش با تولید کالای سنتی از یکدیگر متمایز می گردد. در بخش سنتی هیچ دورنمایی برای پیشرفت دانش فنی وجود ندارد. چون در این بخش هیچ پیشرفت فنی صورت نمی‌پذیرد، رقابت در این بخش به وسیلهٔ شرایط ایستا تعیین می‌شود. رقابت در این بخش دقیقاً در نقطه مقابل رقابت در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا قرار دارد که در آن بنگاهها هم از طریق قیمت‌ها و هم از طریق نوآوری با یکدیگر رقابت می‌کنند. در سطح بخشی، وارد کردن بخش دوم در مدل، از دو طریق اساسی بر رشد و تکامل بخش تولیدی با تکنولوژی بالا تاثیر می‌گذارد.*

اولاً، بخش تولیدی با تکنولوژی بالا باید با بخش سنتی اقتصاد بر سر نیروی کار محدود رقابت کند. ثانیاً، با وجود دو نوع زمینه سرمایه‌گذاری، انتخاب پرتفولیویی که توسط نسل جوان صورت می‌پذیرد بر اندازه و ترکیب انباشت سرمایه در دورهٔ بعد تأثیر می‌گذارد که در نهایت فعالیتهای مربوط به تحقیق و توسعه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا را تحت تأثیر قرار خواهد داد.

واژگان كليدي : رشد درونزا، اقتصاد دو بخشی، نو آوری ، تغییر دانش فنی

۱- مقدمه

مقاله آقایان کوئین و زاهدی‌وفا * (۲۰۰۱)، یک مدل رشد درونزای یک بخشی را با یک کالای همگن به طورکامل ارایه و تحلیل می کند که در این مدل بنگاهها می‌توانند با جستجوی مستمر[۱] برای یافتن تکنولوژی بهتر و جدیدتر، بهره‌وری خود را افزایش دهند. در این مقاله مدل مذکور را توسعه داده به نحویکه یک بخش دیگر با یک کالا را نیز دربر می‌گیرد. در این بخش کالای سنتی تولید می‌شود و هیچ دورنمایی[۲] برای پیشرفت دانش فنی وجود ندارد. کالایی که در بخش اصلی تولید می‌شود، کالای با تکنولوژی بالا[۳] نامیده می‌شود و ساختار این بخش دقیقاً همان ساختاری است که در مقاله قبلی کوئین و زاهدی وفا (۲۰۰۱) شرح داده شده است. چون هیچ پیشرفت فنی در این بخش صورت نمی‌پذیرد، رقابت در این بخش، بیشتر توسط شرایط ایستا دیکته می‌شود و دقیقاً در نقطه مقابل رقابت در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا[۴] قرار دارد که در آن بنگاهها هم از طریق قیمت‌ها و هم از طریق نوآوری با یکدیگر رقابت می‌کنند. همانند مقاله پیشین، در هر دوره زمانی، هر بنگاه- چه در بخش سنتی و چه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا-باید بتواند سرمایه خود را در طول دوره تخصیص سرمایه افزایش دهد. همچنین فرض می‌شود که سرمایه هر بخش ویژه همان بخش است و سرمایه افزایش یافته توسط یک بنگاه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا به همان بنگاه اختصاص دارد. قیمت کالای با تکنولوژی بالا واحد فرض می‌شود درحالیکه قیمت کالای سنتی و نرخ دستمزد در این بخش به ترتیب p و w می‌باشد. با قرار دادن قیمت کالای بخش تولیدی با تکنولوژی بالا برابر با یک، رفتار بنگاهها در این بخش دقیقاً شبیه رفتاری است که در مقاله قبلی شرح داده شد. در سطح بخشی، وارد کردن بخش دوم از دو طریق اساسی بر رشد و تکامل بخش تولیدی با تکنولوژی بالا تاثیر می‌گذارد.

اولاً، بخش تولیدی با تکنولوژی بالا همواره باید با بخش سنتی، بر سر نیروی کار محدود رقابت کند. ثانیاً، با وجود دو نوع زمینه سرمایه‌گذاری، انتخاب پرتفولیویی که توسط نسل جوان‌تر در هر دوره زمانی صورت می‌گیرد بر اندازه و ترکیب سرمایه موجود[۵] اقتصاد در دورهٔ بعدی تاثیر می‌گذارد که در نهایت بر فعالیت‌های تحقیق و توسعه RSD در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا تاثیر خواهد گذاشت. هدف ما در این مقاله تحلیل این موضوع است که چگونه تصمیم‌گیری درباره پس‌انداز- یعنی انتخاب پرتفولیو-توسط نسلهای جوان بعدی[۶]، رفتار نوآورانه[۷] بنگاهها در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا و تخصیص منابع انسانی کمیاب بین دو بخش رشد، درونزای اقتصاد را تعیین می‌کند. بخشهای مختلف این مقاله به شکل زیر می‌باشد. در بخش دوم، طرف تولید اقتصاد مورد بحث قرار می‌گیرد. در بخش سوم مسأله حداکثر سازی مطلوبیت دوره زندگیِ مصرف‌کننده جوان[۸] مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش چهارم این مقاله به ارایه تعریفی از تعادل نسلهای هم‌پوش[۹] می‌پردازیم. بخش پنجم به بحث از انباشت سرمایه در یک اقتصاد دوبخشی اختصاص یافته است. در بخش هفتم تحلیل پویا ارایه شده است و بخش هشتم شامل نتیجه‌گیری می‌باشد. محاسبات پیچیده ریاضی در ضمیمه آمده است.

---

* استادیار دانشکده اقتصاد و رئیس مرکز تحقیقات دانشگاه امام صادق(ع)

** دانشجوي كارشناسي ارشد علوم اقتصادي دانشگاه امام صادق(ع)

۱- طرف تولید

طرف تولید اقتصاد از دو بخش تشکیل شده است که یک بخش، کالایی با تکنولوژی بالا تولید می‌کند و بخش دیگر کالای سنتی تولید می‌کند. هر کالا با بکارگیری نیروی کار و سرمایه ویژه هر بخش تولید می‌شود. در هر دوره بخشی از کالای تولید شده مصرف می‌شود و بخش باقیمانده به تخصیص سرمایه تعلق می‌گیرد که سرمایه ویژه هر بخش در دوره بعد را تشکیل می‌دهد.

۱ـ۲ـ بخش تولیدي با تکنولوژي بالا

فرض می‌شود که I مجموعه بنگاههای بخش تولیدی با تکنولوژی بالا باشد. همچنین فرض می‌شود که I محدود می‌باشد. اما به آن اندازه بزرگ است که بنگاهها در این بخش به عنوان گیرنده قیمت[10] رفتار نمایند. علاوه بر این فرض می‌شود که بعد از یک دوره، انتشار تکنولوژی[11] کامل می‌شود. بنابراین در ابتدای هر دوره، تمام بنگاهها در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا یکسان[12] می‌باشند.

فرض کنید که اقتصاد در دورهٔ t شروع به فعالیت کند و موجودی سرمایه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا k_{yt} و در بخش سنتی k_{zt} باشد. همچنین در ابتدای دورهٔ t سطحی از تکنولوژی که در اختیار تمام بنگاههای بخش تولیدی با تکنولوژی بالا می‌باشد با a_t نشان داده شود. چون در ابتدای هر دوره تمام بنگاهها در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا، قرینه[13] هستند، هر بنگاه می‌تواند سرمایه خود را به اندازه $k_{it}=K_t/|I|$ افزایش دهد. وضعیت بنگاه iام در این بخش، در انتهای مرحله تخصیص سرمایه در دورهٔ t به صورت (a_t, k_{it}) می‌باشد. با اختصاص ε واحد از سرمایه‌ای که در مرحله تخصیص سرمایه افزایش داده است، این بنگاه می‌تواند به یک تکنولوژی [جدید] دست یابد. فرض می‌شود، $\hat{a}_{it}$ بالاترین سطح تکنولوژی بنگاه iام و $\hat{k}_{it}$ مقدار سرمایه ویژه باقیمانده در اختیار بنگاه در پایان مرحله جستجو در دوره t باشد. اگر بنگاه iام اقدام به جستجوی تکنولوژی جدید نکند، وضعیت بنگاه به صورت $(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})=(a_t,k_{it})$ خواهد بود. تابع توزیع احتمال $(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})$ به صورت $H((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})\,|\,(a_{it},k_{it}))$ نشان داده می‌شود. چون فعالیت‌های مربوط به تحقیق و توسعهٔ (R&D) بنگاهها در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا مستقل می‌باشد، تابع توزیع احتمال مشترک تمام بنگاهها $(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I}$ به صورت $\prod_{i\in I} H((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})\,|\,(a_{it},k_{it}))$ خواهد بود.

تابع تولید کوتاه مدت بنگاه iام در طول مرحله تولید در دورهٔ زمانی t تابع $y=\hat{a}_{it}\hat{k}_{it}^{\alpha}l^{1-\alpha}$ می‌باشد. در هر مرحله تولید در دورهٔ t، دستمزدها برای هر بنگاه W می‌باشد و هر بنگاه به دنبال حل مساله حداکثرسازی زیر خواهد بود:

$$\max_{l}\,[\hat{a}_{it}\hat{k}_{it}^{\alpha}l^{1-\alpha}-wl]$$

نتیجه حاصل از حل این بهینه سازی، تابع تقاضای نیروی کار به شکل زیز می‌باشد:

$$l(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it},w)=\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\,, \qquad (i\in I)$$

تولید و سود بنگاه به ترتیب برابر است با:

$$y(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it},l(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it},w))=\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it} \qquad (i\in I)$$

و

$$\pi(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it},w)=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it} \qquad (i\in I)$$

تقاضای کل نیروی کار در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا به صورت زیر می‌باشد:

$$L_Y((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},w)=\sum_{i\in I}l(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it},w)=\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}$$

کل تولید این بخش $\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}$ $Y((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},w)=\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$ خواهد بود.

سود(بازده سرمایه) ایجاد شده توسط این بخش را می‌توان به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\Pi((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},w)=\sum_{i\in I}\pi(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it},w)=\alpha\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}$$

نرخ بازده ناخالص سرمایه که در عمل تحقیق یافته[۱۴] است برای سرمایه‌گذاری انجام شده در این بخش $r_{Yt}((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},w\,|\,(a_{it},k_{it})_{i\in I})=\dfrac{\alpha\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}}{\sum_{i\in I}k_{it}}$ می‌باشد.

۲-۲- بخش تولید کننده کالاي سنتي

فرض می‌کنیم که بخش تولید کننده کالای سنتی در شرایط رقابت کامل می‌باشد و هیچ دورنمایی برای پیشرفت دانش فنی در این بخش وجود ندارد. به عبارتی دقیق‌تر تابع تولید کالای سنتی بصورت $Z=bK_Z^{\beta}L_Z^{1-\beta}$ می‌باشد که در آن z کل تولید این بخش، K_Z موجودی سرمایه ویژه این بخش و L_Z نهادهٔ نیروی کار در این بخش می‌باشد. همچنین $0<\beta<1$ ، سهم سرمایه از تولید می‌باشد و $b>0$ مقدار ثابتی است که نشان می‌دهد، سطح دانش فنی در این بخش تغییر نکرده است. این بخش به دنبال حل مسأله حداکثر سازی زیر می‌باشد:

$$\max_{L_Z}\left[pbK_{Zt}^{\beta}L_Z^{1-\beta}-wL_Z\right]$$

که در آن p، قیمت کالای سنتی و w نرخ دستمزد می‌باشد. تقاضای کالا نیروی کار در این بخش،

$$L_Z(K_{Zt},w,p)=\left(\frac{1-\beta}{w}\right)^{1/\beta}(pb)^{1/\beta}K_{Zt}$$

می‌باشد.

کل تولید بخش سنتی،

$$Z(K_{Zt},w,p)=\left(\frac{(1-\beta)p}{w}\right)^{(1-\beta)/\beta}b^{1/\beta}K_{Zt}$$

می‌باشد.

و کل درآمد این بخش،

$$pZ(K_{Zt},w,p)=\left(\frac{1-\beta}{w}\right)^{(1-\beta)/\beta}(pb)^{1/\beta}K_{Zt}$$

خواهد بود.

سود، (بازده سرمایه) در این بخش،

$$\beta pZ(K_{Zt},w,p)=\beta\left(\frac{(1-\beta)}{w}\right)^{(1-\beta)/\beta}(pb)^{1/\beta}K_{Zt}$$

می‌باشد و نرخ بازده ناخالص تحقق یافته سرمایه، در بخش تولیدکننده کالای سنتی،

$$r_{Zt}(K_{Zt},w,p)=\beta\left(\frac{(1-\beta)p}{w}\right)^{(1-\beta)/\beta}b^{1/\beta}$$

خواهد بود.

۳- بهينه سازي مطلوبيت مورد انتظار دورة زندگي[۱۵]

فرض کنید، ترجیحات مصرف دوره زندگی یک مصرف کننده جوان، بوسیله تابع مطلوبیت زیر نشان داده شود:

$$u(c_Y^0,c_Z^0,c_Y^1,c_Z^1)=\sigma\log c_Y^0+(1-\sigma)\log c_Z^0+\delta[\sigma\log c_Y^1+(1-\sigma)\log c_Z^1]$$

که در آن c_Y^0 و c_Z^0 به ترتیب مصرف کالای با تکنولوژی بالا و کالای سنتی در زمانی هستند که مصرف کننده جوان است(دورهٔ اول زندگی مصرف‌کننده) و c_Y^1 و c_Z^1 به ترتیب مصرف کالای با تکنولوژی بالا و کالای سنتی در زمانی هستند که مصرف‌کننده پیر می‌باشد. (دوره دوم زندگی مصرف‌کننده). همچنین $0<\delta<1$ یک پارامتر است و $1>\sigma>0$ نرخ تنزیل[16] می‌باشد.

یک مصرف‌کننده جوان، در دورهٔ t به دنبال حل مساله حداکثر سازی مطلوبیت دورهٔ زندگی زیر

$$\max_{c^0_{Yt},c^0_{Zt},s^0_{Yt},s^0_{Zt}}\left[\sigma\log c^0_{Yt}+(1-\sigma)\log c^0_{Zt}+\delta E\left[\begin{array}{l}\sigma\log[\sigma(\tilde{r}_{Y,t+1}s^0_{Yt}+\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}s^0_{Zt})]\\ +(1-\sigma)\log\left[\dfrac{(1-\sigma)(\tilde{r}_{Y,t+1}s^0_{Yt}+\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}s^0_{Zt})}{\tilde{p}_{t+1}}\right]\end{array}\right]\right]$$

نسبت به قید $w_t-c^0_{Yt}-s^0_{Yt}-p_t(c^0_{Zt}+s^0_{Zt})=0$ می‌باشد.

که درآن w_tنرخ دستمزد در دورهٔ t،p_t قیمت کالای سنتی در دورهٔ t و $\hat{P}_t$ قیمت کالای سنتی در دورهٔ t می‌باشد که در دورهٔ t یعنی زمانی که مصرف کننده جوان پرتفولیوی خود را تنظیم می‌کند، مشخص نمی‌باشد. همچنین s^0_{Yt}بخشی از پس‌انداز می‌باشد که به شکل سرمایهٔ ویژه بخش تولیدی با تکنولوژی بالا در آمده است و s^0_{Zt} بخشی از پس‌انداز می‌باشد سرمایه ویژه که به سرمایه ویژه بخش سنتی تبدیل شده است.

بردار تصادفی $(\tilde{r}_{Y,t+1},\tilde{r}_{Z,t+1},\tilde{p}_{t+1})$به ترتیب انتظارات فرد درمورد نرخ بازدهی ناخالص سرمایه‌گذاری انجام شده در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا، نرخ بازدهی ناخالص سرمایه‌گذاری در بخش سنتی و قیمت کالای سنتی در دورهٔ t+1 را نشان می‌دهد. در نهایتE عملگر انتظار نسبت به توزیع بردار تصادفی $\tilde{r}_{Y,t+1}s^0_{Yt}+\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}s^0_{Zt}$می‌باشد.[17]

اگر $\tilde{r}_{Y,t+1}s^0_{Yt}+\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}s^0_{Zt}$، درآمد تصادفی در دوران پیری (دورهٔ دوم زندگی) مصرف‌کننده‌ای باشد که در دورهٔ t به دنیا آمده است، مصرف وی ازکالاهای با تکنولوژی بالا و کالاهای سنتی این فرد در دورهٔ پیری (دورهٔ دوم زندگی او) به ترتیب عبارتند از:

$$\tilde{c}_{Y,t+1}=\sigma(\tilde{r}_{Y,t+1}s^0_{Yt}+\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}s^0_{Zt})$$

و

$$\tilde{c}_{Z,t+1}=(1-\sigma)(\tilde{r}_{Y,t+1}s^0_{Yt}+\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}s^0_{Zt})/\tilde{p}_{t+1}$$

با فرض اینکه بردار مصرف فعلی (c^0_{Yt},c^0_{Zt})باشد و پرتفولیوی سرمایه‌گذاری (s^0_{Yt},s^0_{Zt})باشد، مطلوبیت مورد انتظار دورهٔ زندگی مصرف کنندهٔ جوان در دورهٔ t به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\sigma\log c^0_{Yt}+(1-\sigma)\log c^0_{Zt}+\delta E[\sigma\log\tilde{c}_{Y,t+1}+(1-\sigma)\log\tilde{c}_{Z,t+1}] \quad (1)$$

مساله مصرف کننده جوان در دورهٔ t، انتخاب برنامهٔ مصرف فعلیِ (c^0_{Yt},c^0_{Zt})و پرتفولیوی سرمایه‌گذاریِ (s^0_{Yt},s^0_{Zt})برای حداکثر کردن بردار مطلوبیت مورد انتظار بالا می‌باشد.

با فرض اینکه λضریب قید بودجه باشد، لاگرانژ این مساله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$L = \sigma \log c^{o}_{Yt} + (1-\sigma)\log c^{o}_{Zt} + \delta E\left[\begin{matrix}\sigma \log[\sigma(\tilde{r}_{Y,t+1} k_{Y,t+1} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1} k_{Z,t+1})] \\ +(1-\sigma)\log\left[\dfrac{(1-\sigma)(\tilde{r}_{Y,t+1} k_{Y,t+1} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}\tilde{k}_{Z,t+1})}{\tilde{p}_{t+1}}\right]\end{matrix}\right] + \lambda[w_t - c^{o}_{Yt} - k_{Y,t+1} - p_t(c^{o}_{Zt} + k_{Z,t+1})].$$

شروط مرتبه اول برای راه‌حل غیر مرزی[۱۸]مساله حداکثرسازی مطلوبیت دورهٔ زندگی عباتند از:

$$\partial L / \partial c^0_{Yt} = \sigma / c^0_{Yt} - \lambda = 0$$
$$\partial L / \partial c^0_{Zt} = (1-\sigma)/c^0_{Zt} - \lambda p_t = 0$$
$$\partial L / \partial s^0_{Yt} = \delta E\left[\frac{\tilde{r}_{Y,t+1}}{\tilde{r}_{Y,t+1} s^0_{Yt} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1} s^0_{Zt}}\right] - \lambda = 0$$
$$\partial L / \partial s^0_{Zt} = \delta E\left[\frac{\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}}{\tilde{r}_{y,t+1} s^0_{Yt} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1} s^0_{Zt}}\right] - \lambda p_t = 0$$
$$\partial L / \partial \lambda = w_t - c^0_{Yt} - s^0_{Yt} - p_t(c^0_{Zt} + s^0_{Zt}) = 0$$

از حل شروط مرتبه اول می‌توان مستقیماً به نتیجه زیر رسید:

$$\lambda = \frac{\sigma}{c^0_{Yt}} = \frac{(1-\sigma)}{p_t c^0_{Zt}} = \delta \frac{E\left[\dfrac{\tilde{r}_{Y,t+1} s^0_{Yt}}{\tilde{r}_{Y,t+1} s^0_{Yt} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1} s^0_{Zt}}\right]}{s^0_{yt}} = \delta \frac{E\left[\dfrac{\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1} s^0_{Zt}}{\tilde{r}_{Y,t+1} s^0_{Yt} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1} s^0_{Zt}}\right]}{p_t s^0_{Zt}} = \frac{1+\delta}{w_t}.$$

بنابراین، برنامه مصرف بهینه در طول زندگی برای مصرف کننده جوان در دورهٔ t با معادلات زیر تعیین می‌گردد:

$$c^0_{Yt} = \sigma \frac{w_t}{1+\delta}\ ,\ c^0_{Zt} = (1-\sigma)\frac{w_t}{(1+\delta)p_t},$$

$$\frac{\delta w_t}{1+\delta} E\left[\frac{\tilde{r}_{Y,t+1}}{\tilde{r}_{Y,t+1} s^{o}_{Yt} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1} s^{o}_{Zt}}\right] = \frac{\delta w_t}{(1+\delta)p_t} E\left[\frac{\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}}{\tilde{r}_{Y,t+1} s^{o}_{Yt} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1} s^{o}_{Zt}}\right] = 1.$$

اگر فرض کنیم که مصرف کننده جوان بخشی از دستمزد خود، W_t را بدون توجه به انتظاراتش در مورد نرخ بازدهی سرمایه‌گذاری که در هر بخش انجام داده است و بدون توجه به انتظاراتش راجع به قیمت کالای سنتی در دورهٔ پیری(دورهٔ دوم زندگی) پس‌انداز کند، میل نهایی به پس‌انداز وی $\delta/(1+\delta)$ خواهد بود. این ویژگی را می‌توان مستقیماً از این فرض که ترجیحات وی از نوع کاب-داگلاس می‌باشد، بدست آورد.

٤- تعریف تعادل نسلهاي هم‌پوش

فرض کنید، در دورهٔ t وضعیت اقتصاد (a_t, K_{Yt}, K_{Zt})می‌باشد. در پایان مرحله تخصیص سرمایه در این دوره، وضعیت بنگاه iام در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا به صورت (a_t, k_{it}) می‌باشد که در آن $k_{it} = K_t/|I|$ می‌باشد. فرض کنید، $(\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})$وضعیت این بنگاه در انتهای مرحله جستجوی تکنولوژی در این دوره باشد. اگر w و p به ترتیب، نرخ دستمزد و قیمت کالای سنتی‌ای باشد که در دورهٔ t رایج است، اگر شرایط تسویه بازار [19]برقرار باشد.بازار نیروی کار در تعادل خواهد بود..

یعنی داشته باشیم:

$$(۲)\quad \left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha} \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it} + \left(\frac{(1-\beta)p}{w}\right)^{1/\beta} b^{1/\beta} K_{Zt} = 1$$

می‌توان نشان داد برای اینکه تقاضای نیروی کار در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا از عرضه کل نیوی کار بیشتر نباشد، نرخ دستمزد باید به گونه‌ای باشد که در نامعادله زیر صدق کند:

$$(۳)\quad w \geq (1-\alpha)\left(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}\right)^{\alpha}.$$

برای هر نرخ دستمزدی که در (۳) صدق می‌کند، فرض می‌شود که

$$p(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt})$$

مقداری برای p می‌باشد که در (۲) صدق می‌کند. به عبارت دقیق‌تر، داریم:

$$(۴)\quad p(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) = \frac{w}{(1-\beta)b}\left(\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha} \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}}{K_{Zt}}\right)^{\beta}$$

معادله (۴) نقشی اساسی در مدل مقاله حاضر بازی می‌کند. این معادله نشان می‌دهد که رابطه تابعی(۱) بین نرخ دستمزد و قیمت کالای سنتی در مرحله تولیدی دوره t باید به گونه‌ای برقرار باشد که بازار نیروی کار در این دوره در تعادل باشد. این امر زمانی تحقق می‌یابد که نتایج فعالیت‌های تحقیق و توسعه R&D بنگاههای بخش تولیدی با تکنولوژی بالا شخص می‌باشد.

منظور از گسترهٔ دستمزد[20]، یک تابع پیوسته بصورت $\Omega : ((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{Zt}) \rightarrow \Omega((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{Zt})$ می‌باشد که برای هر زوج مرتب $((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{Zt})$از اعداد اکیداً مثبت[21]، $\Omega((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{Zt}) > 0$اگر وضعیت اقتصاد در ابتدای مرحله تولید در دوره زمانی t به صورت ۳۸ باشد، می‌توان ۳۷ را نرخ دستمزد رایج در [نقشه] دستمزدی Ω دانست.

حال گستره دستمزد Ω را در نظر می‌گیریم. برای هر زوج مرتب $((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{Zt})$، فرض می‌شود که $(\hat{w}_t, \hat{p}_t)$ یک سیستم قیمت می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$.\hat{p}_t = p(\hat{w}_t \mid (\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{zt}) \quad , \hat{w}_t = \Omega((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it}), K_{zt})$$

در یک سیسستم قیمتی $(\hat{w}_t, \hat{p}_t)$، در طول تولید و مصرفِ دورهٔ t بازار نیروی کار در تعادل می‌باشد. بنابراین، برای یافتن یک تعادل نسلهای هم‌پوش، کافی است که بر گستره‌های دستمزد متمرکز شویم.

زمانی که سیستم قیمتی $(\hat{w}_t, \hat{p}_t)$حاکم است، تولید کل و سود بخش تولیدی با تکنولوژی بالا به ترتیب برابرند با :

$$\hat{Y}_t = Y((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, \hat{w}_t) = \left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_t}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}$$

و

$$\hat{\Pi}_t = \Pi((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, \hat{w}_t) = \alpha\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_t}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}$$

به همین ترتیب، تولید و سود بخش سنتی به ترتیب عبارتند از

$$(۶)\quad \hat{Z}_t = Z(K_{Zt}, \hat{w}_t, \hat{p}_t) = \left(\frac{(1-\beta)\hat{p}_t}{\hat{w}_t}\right)^{(1-\beta)/\beta} b^{1/\beta} K_{Zt}$$

$$\hat{p}_t\hat{Z}_t = \left(\frac{(1-\beta)}{\hat{w}_t}\right)^{(1-\beta)/\beta}(\hat{p}_t b)^{1/\beta}K_{Zt}$$

و

$$\beta\left(\frac{1-\beta}{\hat{w}_t}\right)^{(1-\beta)/\beta}(\hat{p}_t b)^{1/\beta}K_{Zt}$$

در آمد یک مصرف‌کننده که در دورۀ دوم زندگی می‌باشد $\alpha\hat{Y}_t + \beta\hat{p}_t\hat{Z}_t$ می‌باشد. با فرض اینکه ترجیحات وی از نوع کاب-داگلاس می‌باشد، بردار مصرف او در دورۀ t،

$(\hat{c}^1_{Yt},\hat{c}^1_{Zt}) = (\sigma(\alpha\hat{Y}_t + \beta\hat{p}_t\hat{Z}_t), \frac{(1-\sigma)(\alpha\hat{Y}_t + \beta\hat{p}_t\hat{Z}_t)}{\hat{p}_t})$ می‌باشد.

درآمد حاصل از دستمزد مصرف کننده جوان $\hat{w}_t$ می‌باشد. مصرف فعلی وی بوسیله بردار مصرف زیر بدست می‌آید:

$$(\hat{c}^0_{Yt},\hat{c}^0_{Zt}) = \left(\frac{\sigma\hat{w}_t}{1+\delta}, \frac{(1-\sigma)\hat{w}_t}{1+\delta}\right)$$

حال فرض می‌کنیم:

$$a_{t+1} = \max_{i\in I}\hat{a}_{it}$$

(۷) $$K_{Y,t+1} = \hat{Y}_t - \hat{c}^0_{Yt} - \hat{c}^1_{Yt}$$

(۸) $$K_{Z,t+1} = \hat{Z}_t - \hat{c}^0_{Zt} - \hat{c}^1_{Zt}$$

چون فرض می‌شود که اقتصاد بسته می‌باشد، کل تولید هر کالا نباید کمتر از تقاضای کل برای مصرف فعلی آن باشد. به دیگر سخن اقتصاد با مازاد تقاضا مواجه نمی‌باشد. لذا تنها گستره‌های دستمزد که منجر به برقراری [نامعادله] $K_{Y,t+1} \geq 0$ شوند، مورد ملاحظه قرار می‌گیرند، بنابراین وضعیت بنگاه iام در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا در ابتدای مرحله جستجوی [تکنولوژی] ـ آن طور که یک فرد جوان در دوره t انتظار دارد-به صورت زیر می‌باشد:

(۹) $$(a_{i,t+1},k_{i,t+1}) = \left(a_{t+1}, \frac{K_{Y,t+1}}{|I|}\right)$$

همانطور که زاهدی‌وفا و کوئین (۲۰۰۱) نشان داده‌اند، شرط اولیه (۹) به طور کامل رفتار این بنگاه را در طول مرحله جستجو نشان می‌دهد. فرض کنید که $(\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})$ وضعیت این بنگاه در پایان مرحله جستجو در دورۀ t+1 باشد. سیستم قیمتی که در مرحله تولید این دوره تحت شرایط گستره دستمزد Ω حاکم است به صورت زیر نشان داده می‌شود:

(۱۰) $$\hat{w}_{t+1} = \Omega((\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I}, K_{Z,t+1})$$

$$\hat{p}_{t+1} = p(\hat{w}_{t+1} \mid (\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I}, K_{Z,t+1})$$

نرخ بازدهی ناخالص سرمایه که در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا و بخش سنتی در دورۀ t+1 در عمل تحقق می‌یابد به ترتیب

$$\hat{r}_{Y,t+1} = r_{Y,t+1}((\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I}, \hat{w}_{t+1} \mid (a_{i,t+1},k_{i,t+1})_{i\in I}) =$$

(۱۱) $$\frac{\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}^{1/\alpha}_{i,t+1}\hat{k}_{i,t+1}}{\sum_{i\in I}k_{i,t+1}}$$

و

(۱۲) $$\hat{r}_{Z,t+1} = r_{Z,t+1}(K_{Z,t+1},\hat{p}_{t+1},\hat{w}_{t+1}) = \beta\left(\frac{(1-\beta)\hat{p}_{t+1}}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{(1-\beta)/\beta} b^{1/\beta}$$

می‌باشد.

باید به خاطر داشت که توزیع مشترک دسته متغیرهای تصادفی $(\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I}$ به صورت

$\prod_{i\in I}H((\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I} \mid (a_{i,t+1},k_{i,t+1}))$ می‌باشد که می‌توان از آن برای تعیین توزیع سیستم قسمت(۱۰) و همچنین برای محاسبه نرخ بازدهی ناخالص سرمایۀ ویژۀ هر بخش استفاده نمود. این نرخها بوسیله معادلات (۱۱) و(۱۲) نشان داده شده است. مقداری از

پس‌انداز را که فرد جوان در دورهٔ t برای سرمایه‌گذاری در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا اختصاص می‌دهد یعنی $\hat{s}^0_{Yt}$و مقداری از پس‌انداز را که او برای سرمایه در بخش تولیدی سنتی اختصاص می‌دهد یعنی $\hat{s}^0_{Zt}$ می‌توان از حل معادلات زیر به دست آورد:

$$\frac{\delta \hat{w}_t}{1+\delta} \mathrm{E}\left[\frac{\hat{r}_{Y,t+1}}{\hat{r}_{Y,t+1}\hat{s}^0_{Yt} + \hat{p}_{t+1}\hat{r}_{Z,t+1}\hat{s}^0_{Zt}}\right] = \qquad (۱۳)$$

$$\frac{\delta w_t}{(1+\delta)p_t} \mathsf{E}\left[\frac{\tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}}{\tilde{r}_{Y,t+1}s^0_{Yt} + \tilde{p}_{t+1}\tilde{r}_{Z,t+1}s^0_{Zt}}\right] = 1.$$

روشن است که در سیستم معادلات (۱۳)، E عملگر انتظار (امید) نسبت به توزیع مشترک $(\hat{p}_{t+1}, \hat{r}_{Y,t+1}, \hat{r}_{Z,t+1})$ می‌باشد[۲۲].

تعریف: یک گستره دستمزد $\Omega : ((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{Zt}) \to \Omega((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{Zt})$ در صورتیکه شرایط زیر برقرار باشد، تشکیل یک تعادل نسل‌های هم پوش می‌دهد:

الف) برای هر ماتریس $((\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}, K_{Zt})$، مقدار $K_{Y,t+1}$و مقدار $K_{Z,t+1}$که به ترتیب توسط معادلات (۷) و (۸) تعریف می‌شوند، اکیداً مثبت باشند:

ب) بازار فعلی برای کالای با تکنولوژی بالا در تعادل باشد یعنی

$$\hat{Y}_t = \hat{c}^0_{Yt} + \hat{s}^0_{Yt} + \hat{c}^1_{Yt}$$

ج)بازار فعلی برای کالای سنتی در تعادل باشد، به عبارت دیگر:

$$\hat{Z}_t = \hat{c}^0_{Zt} + \hat{s}^0_{Zt} + \hat{c}^1_{Zt}$$

د) انتظارات از نوع انتظارات عقلایی باشد، یعنی

$$\hat{s}^0_{Zt} = K_{Z,t+1}.\ and \quad \hat{s}^0_{Yt} = K_{Y,t+1}$$

می‌توان ثابت کرد که چون سیستم قیمت در طول مرحله تولید و مصرف در دوره t و دوره t+1 بوسیله معادلات (۵) و (۶) تعریف می‌شود، بازار نیروی کار در این دو دوره همواره در تعادل است. بر اساس قانون والراس، هرگاه یکی از شرایط ب و ج برقرار باشد، دیگری نیز برقرار خواهد بود. در نهایت شرط (د) بیان می‌دارد که انتظارات درباره انباشت سرمایه صحیح می‌باشند به گونه‌ای که تصمیم‌گیریها راجع به سرمایه‌گذاری که توسط نسل جوان در دوره t صورت گرفته است، با انتظارات آنها منطبق می‌باشد. این تصمیم گیریها مشروط به انتظار آنها از انتشار تکنولوژی‌ها[۲۳] می‌باشد. همچنین انباشت سرمایه به شکلی که در گستره دستمزد Ω تحقق یافته است با انتظارات انطباق کامل دارد.

۵- انباشت سرمایه

فرض کنید که وضعیت اقتصاد در آغاز مرحله تولید و مصرف در دوره t، $\left(\left(\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it}\right)_{i\in I}, k_{zt}\right)$ می‌باشد. در این مقاله ما به دنبال بررسی تصمیم‌گیری بنگاههاراجع به تولید در هر دو بخش و مطالعه و بررسی رفتار مصرفی نسلهای جوان وپیر در شرایطی می‌باشیم که نرخ دستمزد تحت این قید تغییر می‌کند که قیمت کالای سنتی باید نسبت به تغییرات نرخ دستمزد تعدیل گردد تا بازار نیروی کار در تعادل باقی بماند.

۵-۱- انباشت سرمایه در بخش توليدي با تكنولوژي بالا

فرض کنید که $w \geq (1-\alpha)\left(\sum_{i\in I} \hat{a}^{1/\alpha}_{it}\hat{k}_{it}\right)^{\alpha}$ یک قیمت معین باشد و سیستم قیمت را بصورت $(w, p(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}^{1/\alpha}_{it}\hat{k}_{it}, K_{Zt}))$در نظر بگیرید. در این سیستم قیمتی، بازار نیروی کار در تعادل است و در آمد نسلهای جوان و پیر به ترتیب برابرند با w

$$\alpha Y(\textstyle\sum_{i\in I} \hat{a}^{1/\alpha}_{it}\hat{k}_{it}, w) +$$
$$\beta p(w \mid \textstyle\sum_{i\in I} \hat{a}^{1/\alpha}_{it}\hat{k}_{it}, K_{Zt}) Z(K_{Zt}, w, p(w \mid \textstyle\sum_{i\in I} \hat{a}^{1/\alpha}_{it}\hat{k}_{it}, K_{Zt}))$$

کل مصرف نسل جوان از کالاهای با تکنولوژی بالا و کالاهای سنتی به ترتیب عبارت است از:

$$C^0_{Yt}(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) = \frac{\sigma w}{1+\delta}$$

و

$$\frac{(1-\sigma)w}{(1+\delta)\,p(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt})} = C^0_{Zt}(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt})$$

به همین ترتیب کل مصرف نسل پیر از کالاهای با تکنولوژی بالا و کالاهای سنتی به ترتیب برابر است با:

$$= C^1_{Yt}(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt})$$
$$\sigma[\alpha Y(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, w) + \beta p(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) Z(K_{Zt}, w, p(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}))]$$

و

$$(1-\sigma)[\alpha Y(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, w) / p(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) + \beta Z(K_{Zt}, w, p(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}))]. \qquad C^1_{Zt}(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) =$$

مازاد عرضه کل کالای با تکنولوژی بالا از تقاضای کل برای مصرف فعلی این کالا برابر است با:

$$\begin{aligned} S_Y(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) \\ &= Y(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Yt}) - C^0_{Yt}(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) - C^1_{Yt}(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt})) \\ &= w\left(-\kappa_{Y0} + \kappa_{Y1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha} \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}\right) \end{aligned}$$

که در آن فرض می‌شود:

$$\kappa_{Y0} = \frac{\beta\sigma\delta}{(1-\beta)(1+\delta)} + \frac{\sigma}{(1-\beta)(1+\delta)} > 0, \qquad \kappa_{Y1} = \frac{\beta\sigma}{1-\beta} + \frac{(1-\alpha\sigma)}{1-\alpha} > 0.$$

مشاهده می‌شود که K_{Zt} در طرف راست معادله دوم وجود ندارد. نتایج زیر را می‌توان از معادلات بالا بدست آورد:

لم ۱: منحنی $w \to S_Y(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt})$ اکیداً محدب است و در بازه

$$\left(\frac{1-\sigma+\delta(1-\alpha\delta)}{(1-\alpha)(1+\delta)}\right)(1-\alpha)\left(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}\right)^{\alpha} > 0$$

تا $-\infty$ که دستمزد w از $(1-\alpha)\left(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}\right)^{\alpha}$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد، نزولی می‌باشد. مقدار این منحنی زمانی که ?? برقرار باشد معادل صفر می‌باشد. در این حالت شرایط زیر برقرار است:

$$w^{\#}(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) = (1-\alpha)a[\kappa^{\#} \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}]^{\alpha},$$

و

$$\kappa^{\#} = \frac{\kappa_{Y1}}{\kappa_{Y0}}$$

۲-۵. انباشت سرمايه در بخش توليدي كالاي سنتي

مازاد عرضه کل کالای سنتی بر تقاضای این کالا برای مصرف فعلی برابر است با :

$$S_Z(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt})$$
$$= Z(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Yt}) - C_{Zt}^{0}(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt}) - C_{Zt}^{1}(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt}))$$
$$b\left[\kappa_{Z0} - \kappa_{Z1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right]\left[\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}}{K_{Zt}}\right]^{-\beta} =$$

که در آن فرض کرده‌ایم:

$$\kappa_{Z0} = \frac{\delta - \beta\delta + \sigma + \beta\delta\sigma}{1+\delta} > 0 \quad \text{و} \quad \kappa_{Z1} = \frac{(1+\beta(-1+\sigma) - \alpha\sigma)}{1-\alpha} > 0$$

باشد. به راحتی می‌توان ثابت کرد که $\kappa_{Z0} < \kappa_{Z1}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\kappa^{b} = \frac{\kappa_{Z1}}{\kappa_{Z0}} > 1$$

لِم ۲ : منحنی $w \to S_Z(w \mid \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt})$ اکیداً مقعر است و در بازه $-\infty$ تا

$$\left(1 - \frac{(1-\sigma)(1+\beta\delta)}{(1+\delta)}\right) b K_z^{\beta}$$

اکیداً نزولی است که در این بازه، w از همسایگی راست $(1-\alpha)\left(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)^{\alpha}$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد. وقتی که $w = w^{b}(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt})$ ، مقدار این تابع برابر صفر می‌باشد. در این حالت مقدار دستمزد برابر است با:

$$w^{b}(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt}) = (1-\alpha)a[\kappa^{b}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}]^{\alpha}.$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که $\kappa^{b} < \kappa^{\#}$. می‌باشد. بنابراین داریم:

$$w^{b}(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt}) < w^{\#}(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt}).$$

۳-۵- دامنه نرخهاي معتبر دستمزد[۲۴]

چون اقتصاد دو بخشیِ مدل ما یک اقتصاد بسته می‌باشد، تقاضای کل هر کالا برای مصرف فعلی نمی‌تواند مازاد بر عرضه کل کاملا آن باشد. بنابراین تنها نرخهای دستمزدی که در شرط زیر صدق کنند، معتبر می‌باشند.

$$(17) \quad w^b\Big(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\ ,K_{Zt}\Big) \le w \le\ w^{\#}\Big(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\ ,K_{Zt}\Big).$$

بنابراین، برای اینکه انباشت سرمایه در طول زمان صورت پذیرد، نامساویهای (۱۷) باید مؤکد باشند. برای هر نرخ دستمزدی که در (۱۷) صدق می‌کند، اتحاد درآمد ملی باید به صورت زیر برقرار باشد:

$$(18) \quad \begin{aligned} &Y\big(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},w\big)+\\ &p\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)Z\big(K_{Zt},w,p(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt})\big)\end{aligned}$$

$$]\,C_{Zt}^{0}\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)+\dfrac{\delta w}{1+\delta}\ \ p\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)+C_{Yt}^{0}\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)=[$$

$$+[\,C_{Yt}^{1}\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)\ +\ \ p\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)\ C_{Zt}^{1}\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)\,].$$

مشاهده می‌شود که طرف راست معادله (۱۸) درآمد ملی می‌باشد. عبارت بین کروشه اول درآمد حاصل از دستمزدِ نسل جـوان و عبـارت کروشه دوم درآمد سرمایه‌ای نسل پیر(دوره دوم زندگی) می‌باشد. اگر اتحاد (۱۸) را بازنویسی کنیم، اتحاد زیر بدست خواهد آمد:

$$\Big[Y\big(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},w\big)-C_{Yt}^{0}\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)-C_{Yt}^{1}\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)\Big]+$$

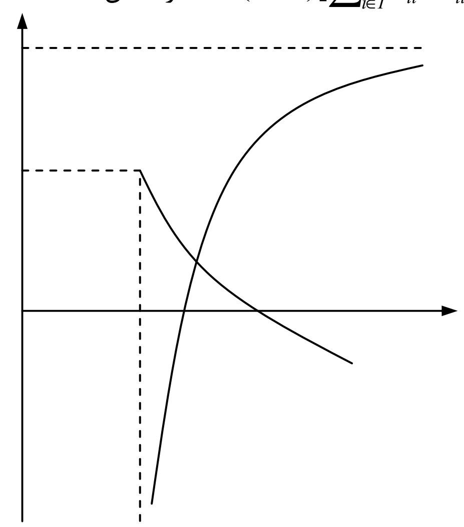
$$(12) \quad p\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)\left(\begin{aligned}&Z\big(K_{Zt},w,p(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt})\big)-\\ &C_{Zt}^{0}\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)-C_{Zt}^{1}\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)\end{aligned}\right)$$

$$=S_Y\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)+$$

$$\frac{\delta w}{1+\delta}.=\ \ p\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)S_Z\big(w\,|\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)$$

معادله دوم در اتحاد (۱۹) نشان می‌دهد که مجموع مقادیر مازاد عرضه کل کالای با تکنولوژی بالا بر تقاضای کل این کالا بـرای مصـرف فعلی و مازاد و عرضه کل کالای سنتی بر تقاضای این کالا برای مصرف فعلی تابعی از نرخ دستمزد w می‌باشد که همواره معادل پس‌انداز کـل نسل جوان است.

شکل زیر، توابع پس‌انداز $w \to S_Y\big(w\,|\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)$ و $w \to S_Z\big(w\,|\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}\big)$ و $w > (1-a)[\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}]^{\alpha}$.را نشان می‌دهد:



$$\left(1-\frac{(1-\sigma)(1+\beta\gamma)}{1+\gamma}\right)bK_z^{\beta}$$

$$\left(1-\frac{\sigma(1+\alpha\gamma)}{1+\gamma}\right)[\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}]^{1/\alpha} \qquad S_Z(w\,|\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt})$$

$$w^b(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}) \quad w^{\#}(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}) \quad w$$

$$(1-\alpha)[\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}]^{1/\alpha} \qquad S_Y(w\,|\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt})$$

.

٦- وجود تعادل نسلهاي هم پوش

فرض کنید که $\left(\Omega^n\right)_{n=0}^{\infty}$ سری مربوط به گستره‌های دستمزد باشد که به شکل بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود. بـرای n=0، داریم:

$$\Omega^0:(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})\rightarrow\Omega^0(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})=(1-\alpha)(\kappa^0)^{\alpha}\left(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},\right)^{\alpha}$$

که در آن κ^0 همانطور که در (۱۶) تعریف گردید، مقدار ثابتی برای κ^b می‌باشد. روشن است که نـرخ دسـتمزد در Ω^0، حـداقل نـرخ معتبر دستمزد می‌باشد. برای تعیین Ω^1, به این شکل عمل می‌کنـیم . فـرض مـی‌کنـیم کـه سیسـتم در زمـان t باشـد و Ω^0 گسـتره دستمزدی است که نسل جوان انتظار دارد در دوره بعد وجود داشته باشد. حال فرض می‌کنیم که $(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})$ وضعیت سیسـتم در ابتـدای مرحلـه تولیـد و مرحلـه مصـرف در دوره t باشـد. بـرای اینکـه علایـم دسـت و پـا گیـر نباشـند، فـرض مـی‌کنـیم کـه $\hat{\Xi}_t=\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}$. می‌باشد. با فرض اینکه نقشه مورد انتظار Ω^0 می‌باشـد، مـی‌خـواهیم نـرخ تعـادلی دسـتمزد بـرای دوره فعلـی را محاسبه نمائیم . در ضمیمه شماره۱ نتایج زیر به اثبات رسیده است.

لِم ۳: اگر انتظار می‌رود که Ω^0 گستره دستمزد موجود در دوره بعد باشد، گستره تعادلی دستمزد در دوره فعلی برابر است با:

$$\Omega^1:(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})\rightarrow\Omega^1(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})=(1-\alpha)(\kappa^1)^{\alpha}\left(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)^{\alpha}$$

که در آن $\kappa^1=\zeta(\kappa^0)$ می‌باشد که در آن ζ تابعی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\kappa^b\le\kappa\le\kappa^{\#}. \quad , \ \zeta:\kappa\rightarrow\zeta(\kappa)=\frac{(1-\alpha)\beta\kappa_{Y1}[\kappa-1]+\alpha\kappa_{Z1}}{(1-\alpha)\beta\kappa_{Y0}[\kappa-1]+\alpha\kappa_{Z0}}$$

از همان استدلالی که برای اثبات لِم ۳ مورد استفاده قرار گرفت می‌توان استفاده نمود و سری مربـوط بـه گسـتره هـای دسـتمزد $(\Omega^n)_{n=0}^{\infty}$ را بدست آورد. این سری بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega^n:(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})\rightarrow\Omega^n(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})=(1-\alpha)(\kappa^n)^{\alpha}\left(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)$$

که در آن: $n>0$ و $\kappa^n=\zeta(\kappa^{n-1}), \kappa^0=\kappa^b$ (۲۰) می‌باشد.

روشن است که سری $(\kappa^n)_{n=0}^{\infty}$ به صورتیکه در (۲۰) تعریف شده است، یک سری صعودی یکنواخت[25] می‌باشد که حد بالای آن $\kappa^{\#}$ می‌باشـد. بنابراین حد این سری یعنی $\kappa^*=\ell im_{n\rightarrow\infty}\kappa^n$، یک نقطه معینـی[26] از ζ مـی‌باشـد. در نتیجـه بـرای هـر مقـدار $n\ge 0$, انتظـار مـی‌رود Ω^n گستره دستمزدی باشد که در دوره بعد وجود دارد و Ω^{n+1} گستره تعادلی دستمزد برای دوره فعلی خواهد بود. پس تا بدین جا به نتـایج زیر دست یافته‌ایم:

گزاره ۱: گستره دستمزد

$$\Omega^*:(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})\rightarrow\Omega^*(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})=(1-\alpha)(\kappa^*)^{\alpha}\left(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)^{\alpha}$$

که در آن κ^* نقطه معینی از تابع ζ می‌باشد، به عبارت دیگر، $\kappa^*=\dfrac{(1-\alpha)\beta\kappa_{Y1}[\kappa^*-1]+\alpha\kappa_{Z1}}{(1-\alpha)\beta\kappa_{Y0}[\kappa^*-1]+\alpha\kappa_{Z0}}$ می‌باشـد، تعـادل منحصـر بـه فـرد نسلهای هم پوش است.

وجود گزاره (۱) اثبات گردید. بحث درباره منحصر بودن آن مبتنی بر لِم (۳) می‌باشد. این بحث در ضمیمه ۲ ارایه شده است. لازم است اشـاره شود که گستره $\zeta:\kappa\rightarrow\zeta(\kappa),\kappa^b\le\kappa\le\kappa^{\#}$, تنها دارای یک نقطه ثابت می‌باشد. این ادعا را می‌توان از راه زیر اثبات نمود:

الف- ζ یک هذلولی متساوی الساقین است

ب- برای مقادیر $\kappa>1$، این تابع پیوسته است.

ج- مقدار این تابع در نقطه ۱ برابر است با $\zeta(1)=\kappa_{Z1}/\kappa_{Z0}=\kappa^b>1$

د- $\ell im_{\kappa\to\infty}\zeta(\kappa)=\kappa_{Y1}/\kappa_{Y0}=\kappa^{\#}>\kappa^{b}$

۷- ديناميسم تعادل نسلهاي هم پوش

فرض کنید وضعیت اقتصاد در دوره t=0 به صورت، (a_0,K_{Y0},K_{Z0}) باشد. مسیر واقعی اقتصاد را $((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},\hat{K}_{Zt})_{t=0}^{\infty}$ در نظر می‌گیریم. برای تمام مقادیر ,...,t=0,1 سیستم قیمتی واقعی و تحقق یافته[27] در دوره t ، $(\hat{w}_t,\hat{p}_t)$ می‌باشد که در آن :

(۲۱) $$\hat{w}_t=\Omega^*((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})=(1-\alpha)\left(\kappa^*\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)^{\alpha}$$

و

(۲۳) $$\hat{p}_t=p(\hat{w}_t\mid\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}\hat{k}_{it},K_{Zt})$$

$$=\frac{\hat{w}_t}{(1-\beta)b}\left(\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_t}\right)^{1/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}}{K_{Zt}}\right)^{\beta}$$

$$=\frac{\hat{w}_t}{(1-\beta)b}\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^*}}{K_{Zt}}\right)^{\beta}$$

$$=\left(\frac{(1-\alpha)(\kappa^*)^{\alpha-\beta}(\kappa^*-1)^{\beta}}{(1-\beta)b}\right)\left(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)^{\alpha}(K_{Zt})^{-\beta}.$$

تقاضای نیروی کار در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا عبارتست از:

$$\hat{L}_{Yt}=L_Y((\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},\hat{w}_t)=\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_t}\right)^{1/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}=\frac{1}{\kappa^*}.$$

و تقاضای نیروی کار در بخش سنتی اقتصاد به صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{L}_{Zt}=L_Z(K_{Zt},\hat{w}_t,\hat{p}_t)=1-\frac{1}{\kappa^*}=\frac{\kappa^*-1}{\kappa^*}$$

گزاره۲: در یک اقتصاد دو بخشی، در طول مسیر واقعی فعالیتهای مربوط به تحقیق و توسعه R&D برای افزایش سطح تکنولوژی، تقاضای نیروی کار در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا در سطح $\frac{1}{\kappa^*}$ ثابت باقی می‌ماند. این درحالیست که تقاضای نیروی کار در بخش سنتی از یک دوره تا دوره بعد در سطح $\frac{\kappa^*-1}{\kappa^*}$ ثابت باقی می‌ماند.

همانطور که از معادلات (۲۲) و (۲۳) می‌توان مشاهده نمود، در هر دوره زمانی، هر چه جستجو برای تکنولوژی موفقیت آمیزتر باشد(یعنی سطح $\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}$ بالاتر باشد)، نرخ دستمزد یعنی $\hat{w}_t$ و قیمت کالای سنتی بالاتر خواهد بود.

چون در هر دوره زمانی، بخش تولیدی کالای با تکنولوژی بالا، از یک مقدار ثابت نهاده نیروی کار یعنی $\frac{1}{\kappa^*}$ استفاده می‌کند، افزاش در نهاده سرمایه‌ای موثر[28] یعنی $\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}$ ، بهره‌وری نهایی نیروی کار در این بخش را افزایش می‌دهد که در نهایت باعث افزایش دستمزد یعنی w_t می‌گردد و چون بخش سنتی اقتصاد در هر دوره مقدار ثابت نیروی کار یعنی $\frac{k^*-1}{k^*}$ را بکار می‌برد، افزایش در قیمت کالاهای سنتی باید همراه با افزایش دستمزدها باشد. زیرا برای اینکه در سطح موجودی سرمایه ثابت یعنی k_{zt}، تعداد نیروی کار در این بخش ثابت باشد، باید نرخ دستمزد افزایش یابد. اگر در دوره زمانی t، فعالیت‌های مربوط به تحقیق و توسعه انجام نشود، خواهیم داشت:

$$\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}=a_t^{1/\alpha}K_{Yt}$$

با جایگزاری این نتیجه و همچنین با جایگزاری معادله (۲۲) در معادله شماره (۱۴) معادله انباشت سرمایه در بخش تولیدی با تکنولوژی به صورت زیر خواهد بود:

$$K_{Y,t+1} = (1-\alpha)(\kappa^*)^{\alpha} a_t K_{Yt}^{\alpha}\left(-\kappa_{Y0} + \frac{\kappa_{Y1}}{\kappa^*}\right) = \eta_Y a_t K_{Yt}^{\alpha}$$

که در آن :

$$\eta_Y = (1-\alpha)(\kappa^*)^{\alpha-1}(-\kappa_{Y0}\kappa^* + \kappa_{Y1})$$

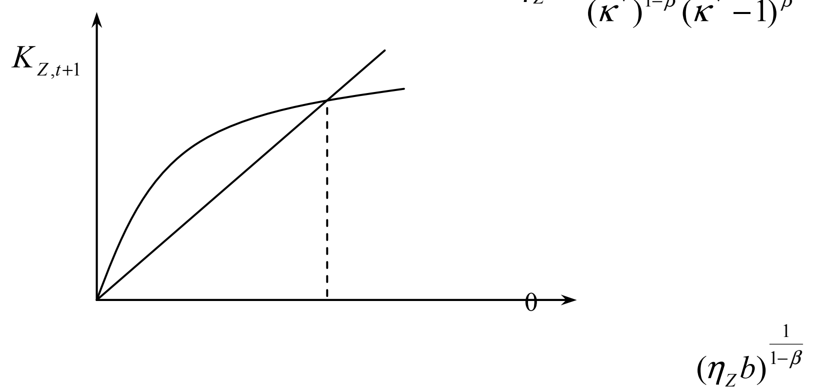
بنابراین اگر هیچ فعالیتی در زمینه تحقیق و توسعه R&D صورت نگیرد، سطح دانش فنی بخش تولیدی با تکنولوژی بالا در طول زمان ثابت خواهد ماند و خواهیم داشت: $a_t = a$=مقدار ثابت. تحت این شرایط موجودی سرمایه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا به سمت تعادل ایستای $(\eta_Y a)^{\frac{1}{1-\alpha}}$میل خواهد کرد.

به همین ترتیب، برای بخش سنتی اقتصاد نیز با جایگذاری معادلات اخیر در معادله (۱۵)، معادله پویای زیر برای انباشت سرمایه در این بخش بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
K_{Z,t+1} &= S_Z(\hat{w}_t \mid \textstyle\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}, K_{Zt}) \\
&= b\left(\kappa_{Z0} - \kappa_{Z1}\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_t}\right)^{1/\alpha} \sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_t}\right)^{1/\alpha}\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}}{K_{Zt}}\right)^{-\beta} \\
&= b\left(\kappa_{Z0} - \frac{\kappa_{Z1}}{\kappa^*}\right)\left(\frac{\kappa^*-1}{\kappa^* K_{Zt}}\right)^{-\beta} \\
&= \frac{b(\kappa_{Z0}\kappa^* - \kappa_{Z1})}{(\kappa^*)^{1-\beta}(\kappa^*-1)^{\beta}}(K_{Zt})^{\beta} = \eta_Z b (K_{Zt})^{\beta}.
\end{aligned}$$

که در آن :

$$\eta_Z = \frac{(\kappa_{Z0}\kappa^* - \kappa_{Z1})}{(\kappa^*)^{1-\beta}(\kappa^*-1)^{\beta}}$$



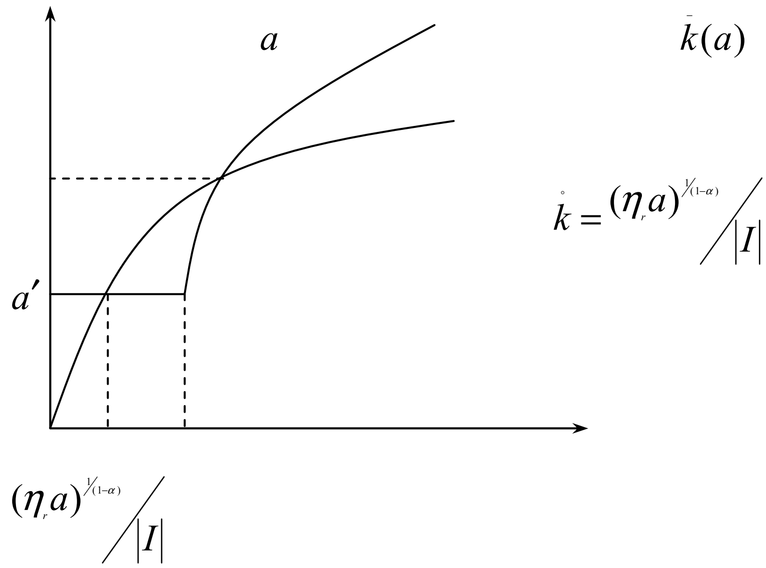
ازمطالب بالا می‌توان گزاره‌های زیر را استنتاج نمود:

گزاره ۳: اگر چه انباشت سرمایه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا، دارای یک روند تصادفی است، اما روند انباشت سرمایه در بخش سنتی اقتصاد قطعی[29] می‌باشد. در بلند مدت، انباشت سرمایه بخش سنتی اقتصاد به سمت یک سطح ایستا یعنی $(\eta_Z b)^{\frac{1}{1-\beta}}$میل می‌کند که به مقدار b و سطح ثابت و غیر قابل تغییر تکنولوژی آن یعنی η_Zبستگی دارد. این سطح ثابت نیز خود به پارامترهای مدل یعنی $\alpha, \beta, \delta, \sigma$و بستگی دارد. در یک سطح بنیادی‌تر، ارتباطات واقعی[30] بین دو بخش از خلال رابطه متقابل بین پارامترهای ساختاری مدل یعنی $\alpha, \beta, \delta, \sigma$بوجود می‌آید. رشد و تکامل در بخش تولید با تکنولوژی بالا از طریق قیمت کالای سنتی بر بخش سنتی اقتصاد تاثیر می‌گذارد. به این صورت که یک برنامه موفق تحقیق و توسعه R&D در هر دوره زمانی افزایش قیمت کالای سنتی را در پی دارد بدون اینکه سطح مصرف این کالا و سطح انباشت سرمایه در بخش سنتی اقتصاد را تحت تاثیر قرار دهد.

در مقاله کوئین و زاهدی‌وفا (۲۰۰۱)، توضیح داده شد که مقادیر پارامترهای طرف عرضه بخش تولیدی با تکنولوژی بالا یعنی α, λ، سود بالقوه تحقیق و توسعه R&D را تعیین می‌کنند. در اینجا نیز همانند مقاله قبل امکان پایداری رشد، به وضعیت نسبی صفحه منحنی $\overset{o}{k}: a \to \overset{o}{k}(a) = \frac{(\eta_Y a)^{1/(1-\alpha)}}{|I|}$ و منحنی $\bar{k}: a \to \bar{k}(a)$ بستگی دارد. در شکل زیر هر دو منحنی نشان داده شده است.

منحنی $\bar{k}: a \to \bar{k}(a)$ منطقه جستجوی مستمر و عدم جستجویِ تکنولوژی را برای یک بنگاه تولید کننده کالای با تکنولوژی بالا جدا می‌کند و منحنی $\overset{o}{k}: a \to \overset{o}{k}(a) = \frac{(\eta_Y a)^{1/(1-\alpha)}}{|I|}$ رابطه بین سطح دانش فنی بخش تولیدی با تکنولوژی بالا و انباشت سرمایه این بخش را در تعادل ایستا نشان می‌دهد، در این تعادل ایستا فعالیت‌های مربوط به تحقیق و توسعه R&D انجام می‌گیرند.

همانند مقاله قبلی زاهدی وفا و کوئین (۲۰۰۱)، اگر $\lambda > \frac{1}{1-\alpha}$ باشد، در بلند مدت رشد، پایدار نخواهد بود و اگر $\lambda < \frac{1}{1-\alpha}$ باشد، رشد اقتصاد در بلند مدت، نامحدود خواهد بود. در حالت بینابینی که $\lambda = 1/(1-\alpha)$ می‌باشد رشد پایدار نمی‌باشد مگر اینکه مقادیر پارامترهای مدل به گونه‌ای باشد که برای تمام مقادیر $a \geq 1$، منحنی $\overset{o}{k}(a)$ بالای منحنی $\bar{k}(a)$ قرار گیرد.



انباشت سرمایه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا در دوره‌هایی که بنگاهها به تحقیق و توسعه می‌پردازند، بوسیله معادله پویای زیر کنترل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
K_{Y,t+1} &= S_Y(\hat{w}_t \mid \textstyle\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it}, K_{Zt}) \\
&= \hat{w}_t \left(-\kappa_{Y0} + \kappa_{Y1} \left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_t} \right)^{1/\alpha} \textstyle\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it} \right) \\
&= (1-\alpha) \left(\kappa^* \textstyle\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it} \right)^{\alpha} \left(-\kappa_{Y0} + \frac{\kappa_{Y1}}{\kappa^*} \right) \\
&= \eta_Y \left(\textstyle\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it} \right)^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

در طول دوره‌هایی که بنگاه مشغول فعالیتهای تحقیق و توسعه می‌باشد، انباشت سرمایه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا به $(\hat{a}_{it}, \hat{k}_{it})_{i\in I}$ بستگی دارد. بنابراین انباشت سرمایه یک متغیر تصادفی می‌باشد. می‌توان نتایج بحث تا بدین جا را در قالب گزاره زیر خلاصه نمود:

گزاره۴: در یک مسیر رشد پایدار، هر بنگاه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا، هم دوره‌های جستجو برای تکنولوژی جدید و هم دوره‌های عدم جستجو را پشت‌سر می‌گذارد. به عبارت دقیق‌تر

الف) در دوره‌ای که جستجو برای تکنولوژی جدید صورت نمی‌گیرد، انباشت سرمایه در این بخش بوسیله معادله $K_{Y,t+1} = \eta_Y a K_{Yt}^{\alpha}$ بدست می‌آید و

ب) در دوره جستجو برای تکنولوژی جدید، انباشت سرمایه بوسیله معادله پویای $K_{Y,t+1} = \eta_Y \left(\sum_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha} \hat{k}_{it} \right)^{\alpha}$ کنترل می‌شود.

در یک اقتصاد دو بخشی برای محاسبه تولید ناخالص داخلی اقتصاد GDP در بلند مدت، از ارزش افزوده هر بخش بهره می‌جوئیم. نقش بخش تولید با تکنولوژی بالا در GDP عبارتست از:

$$\hat{Y}_t = \left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_t}\right)^{(1-\alpha)/\alpha} \sum\nolimits_{i\in I} \hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it} = \frac{\hat{w}_t}{(1-\alpha)\kappa^*}$$

سهم بخش سنتی در GDP را می‌توان از معادلات (۶) و (۲۳) بدست آورد. این مقدار برابر است با:

$$\hat{p}_t\hat{Z}_t = \left(\frac{(1-\beta)}{(1-\beta)b}\left(\frac{\kappa^*-1}{\kappa^* K_{Zt}}\right)^{\beta}\right)^{(1-\beta)/\beta} b^{1/\beta} K_{Zt}\frac{\hat{w}_t}{(1-\beta)b}\left(\frac{\kappa^*-1}{\kappa^* K_{Zt}}\right)^{\beta} =$$

$$\frac{(\kappa^*-1)\hat{w}_t}{(1-\beta)\kappa^*}$$

بنابراین تولید ناخالص داخلی GDP برابر است با:

$$\hat{Y}_t + \hat{p}_t\hat{Z}_t = \frac{\hat{w}_t}{\kappa^*}\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\kappa^*-1}{1-\beta}\right)$$

سهم کالای سنتی در تولید ناخالص داخلی GDP مقداری ثابت است که به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\frac{\hat{p}_t\hat{Z}_t}{\hat{Y}_t+\hat{p}_t\hat{Z}_t} = \frac{\frac{\kappa^*-1}{(1-\beta)\kappa^*}\hat{w}_t}{\frac{\hat{w}_t}{\kappa^*}\left(\frac{1}{1-\alpha}+\frac{\kappa^*-1}{1-\beta}\right)} = \frac{(1-\alpha)(\kappa^*-1)}{(1-\beta)+(1-\alpha)(\kappa^*-1)} = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین از لحاظ ارزش، تولید کالای سنتی به عنوان سهمی از در آمد ملی، مقداری ثابت است. از لحاظ فیزیکی و کمی، بخش تولیدی با تکنولوژی بالا نسبت به بخش سنتی رشد می‌کند. از لحاظ ارزش، اندازه نسبی[این بخش] در طول زمان ثابت می‌باشد.

۸- نتيجه گيري

در این مقاله، مدل اصلی زاهدی وفا و کوئین (۲۰۰۱) بسط و گسترش داده شده و بخش دیگری که از آن به بخش سنتی یاد می‌شود، وارد مدل گردید. در این بخش هیچ دورنما و امیدی برای پیشرفت دانش فنی وجود ندارد. هدف ما از بسط و گسترش مدل اصلی، اولاً واقعی کردن مدل یک بخشی زاهدی وفا و کوئین(۲۰۰۱) می‌باشد. ثانیاً، مدل دو بخشی حاضر به عنوان تخته پرش و مقدمه‌ای برای مدل تجارت بین‌الملل به حساب می‌آید که در مقاله‌ای جداگانه به آن پرداخته‌ایم.

در این مقاله، وجود تعادل نسلهای هم‌پوش و منحصر به فرد بودن آن را ثابت کردیم. تعادل نسلهای هم‌پوش بوسیله یک گستره دستمزدی، نشان داده می‌شود که هر دوره یک نرخ دستمزد تعادلی در اختیار می‌گذارد که این نرخ وضعیت بخش تولیدی با تکنولوژی بالا را در پایان مرحله جستجو برای تکنولوژی نشان می‌دهد. با استفاده از فرم لگاریتمی اقتصاد دو بخشی می‌توان فرم بسته گستره تعادلی دستمزد را بدست آورد.

بر اساس این تعادل می‌توان مشاهده نمود که تقاضای نیروی کار در هر دو بخش ثابت می‌باشد. بنابر این رشد بخش سنتی اقتصاد دارای یک روند قطعی است درحالیکه به خاطر ماهیت نامطمئن فرآیند جستجوی تکنولوژی، روند رشد در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا تصادفی می‌باشد. بخش سنتی اقتصاد، در روند قطعی رشد خود به سمت یک وضعیت ایستا میل می‌کند. همه چیز در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا رخ می‌دهد. جستجوی موفقیت آمیز و مستمر برای تکنولوژی جدید، دستمزد و قیمت کالای سنتی را افزایش می‌دهد. اگر چه بخش تولیدی با تکنولوژی بالا از لحاظ کمی و فیزیکی رشد می‌کند، اما ارزش این بخش به صورت درصدی از درآمد ملی در طول زمان و در خلال مسیر واقعی اقتصاد ثابت می‌باشد. سهم بخش سنتی اقتصاد نیز به عنوان درصدی از درآمد ملی در طول زمان ثابت می‌باشد. جابه جایی نیروی کار بین دو بخش باعث می‌شود که نرخ دستمزد در هر دو بخش اقتصاد یکسان باشد. افزایش نرخ دستمزد در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا در اثر برنامه موفق تحقیق و توسعه R&D باعث می‌شود که نرخ دستمزد در بخش سنتی اقتصاد نیز افزایش یابد.[به علت اثر جابه‌جایی و تحرک نیروی کار بین دو بخش، نرخ دستمزد همواره در دو بخش یکسان می‌باشد]. افزایش قیمت کالای سنتی اقتصاد ناشی از تقاضای این کالا برای مصرف فعلی و اهداف سرمایه‌گذاری می‌باشد. به عبارت دیگر افزایش تقاضای کالای سنتی برای اهداف سرمایه‌گذاری و مصرف فعلی باعث افزایش قیمت این کالا می‌گردد.

ضمیمه-۱-وجود تعادل نسلهاي هم‌پوش

نرخ دستمزد w را در بازهٔ $(\hat{\Xi}_t, K_{Zt})$ $w^{\#}$ و $(\hat{\Xi}_t, K_{Zt})$ w^b اختیار می‌کنیم. برای اینکه بازار نیروی کار در دوره فعلی در تعادل باشد، قیمت فعلی کالای سنتی باید به صورت زیر باشد:

$$p(w \mid \hat{\Xi}_t, K_{Zt}) = \frac{w}{(1-\beta)b}\left(\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t}{K_{Zt}}\right)^{\beta}$$

فرض کنید در سیستم قیمتی $(w, p(w \mid \hat{\Xi}_t, K_{Zt}))$، بازارهای کالای سنتی و کالای با تکنولوژی بالا در تعادل باشند. در این شرایط موجودی سر مایه هر دو بخش در دوره بعدی به صورت زیر خواهد:

$$K_{Y,t+1} = S_Y(w \mid \hat{\Xi}_t, K_{Zt}) = w\left(-\kappa_{Y0} + \kappa_{Y1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t\right)$$

$$K_{Z,t+1} = S_Z(w \mid \hat{\Xi}_t, K_{Zt}) = b\left[\kappa_{Z0} - \kappa_{Z1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t\right]\left[\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t}{K_{Zt}}\right]^{-\beta}$$

فرض بر این است که سطح دانش فنی اقتصاد در ابتدای دوره بعدی به صورت زیر تعیین گردد:

$$a_{t+1} = \max_{i\in I} \hat{a}_{it}.$$

بنابراین وضعیت اقتصاد در ابتدای دوره t+1 به صورت $(a_{t+1}, K_{Y,t+1}, K_{Z,t+1})$ می‌باشد و در این دوره هر بنگاه در بخش تولیدی با تکنولوژی بالا مرحله جستجوی تکنولوژی جدید را در وضعیت $(a_{i,t+1}, k_{i,t+1}) = (a_{t+1}, K_{Y,t+1}/|I|)$ آغاز می‌کند. فرض کنید، $(\hat{a}_{i,t+1}, \hat{k}_{i,t+1})_{i\in I}$ شرایط واقعی بخش تولیدی با تکنولوژی بالا در پایان مرحله جستجوی تکنولوژیِ دوره فوق باشد. یادآور می‌شود که توزیع احتمال مشترک این وضعیت $\prod_{i\in I} H((\hat{a}_{i,t+1}, \hat{k}_{i,t+1t}) \mid (a_{i,t+1}, k_{i,t+1}))$ می‌باشد. با فرض اینکه Ω^0 گستره دستمزدی است که انتظار می‌رود در این دوره وجود داشته باشد، نرخ دستمزد واقعی و قیمت واقعی کالای سنتی به ترتیب توسط معادلات زیر تعیین می‌گردد:

$$\hat{w}_{t+1} = (1-\alpha)[\kappa^0 \hat{\Xi}_{t+1}]^{\alpha}$$

$$\hat{p}_{t+1} = p(\hat{w}_{t+1} \big| (\hat{a}_{i,t+1,}\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I}, K_{Z,t+1}) =$$

$$\frac{\hat{w}_{t+1}}{(1-\beta)b}\left(\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_{t+1}}{K_{Z,t+1}}\right)^{\beta}$$

$$= \frac{\hat{w}_{t+1}}{(1-\beta)b}\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{K_{Z,t+1}}\right)^{\beta}$$

که در آن فرض شده است که: $\hat{\Xi}_{t+1} = \sum_{i\in I} \hat{a}_{i,t+1}^{1/\alpha}\hat{k}_{i,t+1}.$ باشد. نرخ بازده عینی ناخالص سرمایه که توسط نسل جوان در دوره t تحقق می‌یابد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{r}_{Y,t+1} = r_{Y,t+1}((\hat{a}_{i,t+1}, \hat{k}_{i,t+1})_{i\in I}, \hat{w}_{t+1} \mid (a_{i,t+1}, k_{i,t+1})_{i\in I}) = \frac{\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}\hat{\Xi}_{t+1}}{K_{Y,t+1}}$$

و

$$\hat{r}_{Z,t+1}=r_{Z,t+1}(K_{Z,t+1},\hat{p}_{t+1},\hat{w}_{t+1})=\beta\left(\frac{(1-\beta)\hat{p}_{t+1}}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{(1-\beta)/\beta}b^{1/\beta}=$$

$$\beta b\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{K_{Z,t+1}}\right)^{1-\beta}$$

حال در این شرایط، پرتفولیوی بهینه نسل جوان در دوره زمانی t از حل شروط مرتبه اول زیر بدست می‌آید:

$$\text{(A۱۰۲)}\quad \frac{\delta w}{1+\delta}\mathsf{E}\left[\frac{\hat{r}_{Y,t+1}}{\hat{r}_{Y,t+1}K_{Y,t+1}+\hat{p}_{t+1}\hat{r}_{Z,t+1}K_{Z,t+1}}\right]=1$$

$$\text{(A۱۰۳)}\quad \frac{\delta w}{(1+\delta)\,p(w\mid\hat{\Xi}_t,K_{Zt})}\mathsf{E}\left[\frac{\hat{p}_{t+1}\hat{r}_{Z,t+1}}{\hat{r}_{Y,t+1}K_{Y,t+1}+\hat{p}_{t+1}\hat{r}_{Z,t+1}K_{Z,t+1}}\right]=1$$

در معادلات(A۱۰۲) و ((A۱۰۳) ، E، امید ریاضی بردار تصادفی $.(\hat{r}_{Y,t+1},\hat{r}_{Z,t+1},\hat{p}_{t+1})$مـی‌باشـد. از حـل (A۱۰۲) و (A۱۰۳) داریـم:
؟؟۱۵۱

با جایگزاری عبارات مربوط به $\hat{r}_{Y,t+1}$و $\hat{r}_{Z,t+1}$و باز نویسی (A۱۰۴) داریم:

$$p(w\mid\hat{\Xi}_t,K_{Zt})\mathsf{E}\left[\frac{\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\hat{\Xi}_{t+1}/K_{Y,t+1}}{\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\hat{\Xi}_{t+1}+\frac{\beta\hat{w}_{t+1}}{1-\beta}(1-\frac{1}{\kappa^0})}\right]=$$

$$\mathsf{E}\left[\frac{\frac{\beta\hat{w}_{t+1}}{1-\beta}\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{K_{Z,t+1}}\right)}{\alpha\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\hat{\Xi}_{t+1}+\frac{\beta\hat{w}_{t+1}}{1-\beta}(1-\frac{1}{\kappa^0})}\right]$$

که با استفاده از (A۱۰۱) نتیجه به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{w}{(1-\beta)b}\left[\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t}{K_{Zt}}\right]^{\beta}\mathsf{E}\left[\frac{\frac{\alpha}{(1-\alpha)K_{Y,t+1}}\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\hat{\Xi}_{t+1}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\hat{\Xi}_{t+1}+\frac{\beta}{1-\beta}(1-\frac{1}{\kappa^0})}\right]$$

$$=\mathsf{E}\left[\frac{\frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{K_{Z,t+1}}\right)}{\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\hat{w}_{t+1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\hat{\Xi}_{t+1}+\frac{\beta}{1-\beta}(1-\frac{1}{\kappa^0})}\right]$$

معادله (A۱۰۵) را می‌توان به صورت (A۱۰۶) بازنویسی نمود و سپس به معادله (A۱۰۷) تبدیل نمود:

$$(A۱۰۶)\quad \frac{w}{(1-\beta)b}\left[\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t}{K_{Zt}}\right]^{\beta} \mathrm{E}\left[\frac{\frac{\alpha}{(1-\alpha)K_{Y,t+1}}\frac{1}{\kappa^0}}{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\kappa^0}+\frac{\beta}{1-\beta}(1-\frac{1}{\kappa^0})}\right]=$$

$$\mathrm{E}\left[\frac{\frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{K_{Z,t+1}}\right)}{\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{1}{\kappa^0}+\frac{\beta}{1-\beta}(1-\frac{1}{\kappa^0})}\right]$$

$$(A۱۰۷)\quad \frac{w}{(1-\beta)b}\left[\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t}{K_{Zt}}\right]^{\beta}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)K_{Y,t+1}}\frac{1}{\kappa^0}\right)=$$

$$\frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{K_{Z,t+1}}\right)$$

با جایگزاری عبارات معادل $K_{Y,t+1}\,,K_{Z,t+1}$ در (A۱۰۷)، معادله (A۱۰۸) بدست می‌آید:

$$\frac{w}{(1-\beta)b}\left[\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t}{K_{Zt}}\right]^{\beta}\frac{\alpha}{(1-\alpha)w[-\kappa_{Y0}+\kappa_{Y1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t]}\frac{1}{\kappa^0}$$

$$=\frac{\beta}{1-\beta}\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{b[\kappa_{Z0}-\kappa_{Z1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t]}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t}{K_{Zt}}\right)^{\beta}$$

این معادله را می‌توان به ترتیب به صورت (A۱۰۹)، (A۱۰۱۰) و (A۱۰۱۱) باز نویسی نمود :

$$(A۱۰۹)\quad \frac{\alpha}{(1-\alpha)[-\kappa_{Y0}+\kappa_{Y1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t]}\frac{1}{\kappa^0}=$$

$$\beta\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{[\kappa_{Z0}-\kappa_{Z1}\left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t]}\right)$$

(A۱۰۱۰) $$\frac{\alpha}{(1-\alpha)[-\kappa_{Y0}+\kappa_{Y1}\hat{x}_t]}\ \frac{1}{\kappa^0} = \beta\left(\frac{1-\frac{1}{\kappa^0}}{[\kappa_{Z0}-\kappa_{Z1}\hat{x}_t]}\right)$$

(A۱۰۱۱) $$\frac{\alpha}{(1-\alpha)[-\kappa_{Y0}+\kappa_{Y1}\hat{x}_t]} = \beta\left(\frac{\kappa^0-1}{[\kappa_{Z0}-\kappa_{Z1}\hat{x}_t]}\right)$$

مشاهده می‌شود در معادلات (A۱۰۱۰) و (A۱۰۱۱) فرض کرده‌ایم که $\hat{x}$ به صورت زیر باشد:

(A۱۰۱۲) $$\hat{x}_t = \left(\frac{1-\alpha}{w}\right)^{1/\alpha}\hat{\Xi}_t$$

اگر (A۱۰۱۱) را برحسب $\hat{x}_t$ حل کنیم نتیجه زیر بدست خواهد آمد:

(A۱۰۱۳) $$\hat{x}_t = \frac{(1-\alpha)\beta(\kappa^0-1)\kappa_{Y0}+\alpha\kappa_{Z0}}{(1-\alpha)\beta(\kappa^0-1)\kappa_{Y1}+\alpha\kappa_{Z1}}$$

با جایگذاری (A۱۰۱۳) در (A۱۰۱۲) نرخ تعادلی دستمزد برای دوره فعلی بدست می‌آید. بنابراین داریم:

(A۱۰۱۴) $$w = (1-\alpha)\left[\frac{(1-\alpha)\beta(\kappa^0-1)\kappa_{Y1}+\alpha\kappa_{Z1}}{(1-\alpha)\beta(\kappa^0-1)\kappa_{Y0}+\alpha\kappa_{Z0}}\right]^{\alpha}\hat{\Xi}_t^{\alpha} =$$
$$(1-\alpha)[\kappa^1\hat{\Xi}_t]^{\alpha}$$

که در آن: $\kappa^1 = \frac{(1-\alpha)\beta(\kappa^0-1)\kappa_{Y1}+\alpha\kappa_{Z1}}{(1-\alpha)\beta(\kappa^0-1)\kappa_{Y0}+\alpha\kappa_{Z0}}$ می‌باشد.

بنابراین لم۳ به این ترتیب ثابت می‌شود.

ضمیمه ۲.

فرض کنید، $\Omega:(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt}) \to \Omega(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})$ یک گستره تعادلی دستمزد باشد. بنابراین می‌توان Ω را به صورت زیر نوشت:

$$\Omega:(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt}) \to \Omega(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt}) =$$
$$(1-\alpha)(\kappa(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}))^{\alpha}\left(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)^{\alpha}$$

که در آن k به صورت زیر تعریف شده است:

$$\kappa(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}) = \left[\frac{\Omega(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})}{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{\alpha}}\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}$$

فرض کنید که اقتصاد در پایان مرحله جستجو در دوره t باشد و وضعیت واقعی اقتصاد دو بخشی بـه صـورت $(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt})$ باشـد. نرخ تعادلی دستمزد تحت شرایط Ω به صورت زیر می‌باشد:

$$\Omega(\hat{a}_{it},\hat{k}_{it})_{i\in I},K_{Zt}) = (1-\alpha)(\kappa(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}))^{\alpha}\left(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it}\right)^{\alpha}$$

حال فرض می‌کنیم که $(\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I},K_{Z,t+1})$ وضعیتی باشد که ممکن است در عمل برای اقتصاد در دوره t+1 محقق گردد. تحت شرایط Ω، تحقق اقتصاد به شکل بالا منجر به حصول نرخ تعادلی دستمزد به صورت زیر می‌شود:

$$\Omega(\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I},K_{Z,t+1}) =$$
$$(1-\alpha)(\kappa(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{i,t+1}^{1/\alpha}\hat{k}_{i,t+1},K_{Z,t+1}))^{\alpha}\left(\textstyle\sum_{i\in I}\hat{a}_{i,t+1}^{1/\alpha}\hat{k}_{i,t+1}\right)^{\alpha}$$

حال با جایگذاری $\kappa(\sum_{i\in I}\hat{a}_{i,t+1}^{1/\alpha}\hat{k}_{i,t+1},K_{Z,t+1})$ به جای κ^1 و $\kappa(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt})$ به جای κ^0 و با استفاده از استدلالی که در ضمیمه شماره یک مورد استفاده قرار گرفت، می‌توانیم به یک شکل دیگر از (A۱۰۱۵) دست یابیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$\kappa(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt})=\zeta(\kappa(\sum_{i\in I}\hat{a}_{i,t+1}^{1/\alpha}\hat{k}_{i,t+1},K_{Z,t+1}))$$

که در آن ζ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\zeta(\kappa)=\frac{(1-\alpha)\beta(\kappa-1)\kappa_{Y1}+\alpha\kappa_{Z1}}{(1-\alpha)\beta(\kappa-1)\kappa_{Y0}+\alpha\kappa_{Z0}}$$

حال می‌بینیم که طرف چپ معادله (A۲۰۳) مقدار ثابتی می‌باشد، زیرا نا اطمینانی درباره فعالیتهای تحقیق و توسعه R&D در دوره t، از میان رفته است.

بنابراین همانطور که قبلاً هم در بیان گزاره یک اشاره شد، ζ برای تمام مقادیر $1<\zeta$، اکیداً صعودی است. همچنین، چون Ω معتبر است لذا باید داشته باشیم.

$$\kappa(\sum_{i\in I}\hat{a}_{i,t+1}^{1/\alpha}\hat{k}_{i,t+1},K_{Z,t+1}))\geq\kappa^{b}>1$$

بنابراین صرف نظر از اینکه مقدار $(\hat{a}_{i,t+1},\hat{k}_{i,t+1})_{i\in I},K_{Z,t+1})$ چقدر باشد، $\kappa(\sum_{i\in I}\hat{a}_{i,t+1}^{1/\alpha}\hat{k}_{i,t+1},K_{Z,t+1}))$ باید برابر با مقدار ثابتی مثل $\overline{\kappa}$ باشد. چون Ω یک گستره تعادلی دستمزد می‌باشد، بنابراین باید داشته باشیم: $\kappa(\sum_{i\in I}\hat{a}_{it}^{1/\alpha}\hat{k}_{it},K_{Zt}))=\overline{\kappa}$. بنابراین با توجه به (A۲۰۳)، $\overline{\kappa}$ باید نقطه ثابتی از تابع ζ باشد. با یادآوری این نکته که κ^{*} تنها نقطه ثابت تابع ζ می‌باشد می‌توان منحصر به فرد بودن تعادلی نسلهای هم‌پوش را ثابت نمود.

یادداشت ها:

---

*-Quyen N.V. and M.H. Zahedi Vafa (2001) “A Sequential Search Model for new technology” University of Ottawa, Department of Economics, Working paper
١- Sequentioal search
٢-Prospect
٣-High-Technology good
٤-High-Technology sector
٥-capital stock
٦-Successive young generation
٧- Inovating behavior
٨-LIFE TIME UTILITY Maximization of young individual
٩-over lapping generation equilibrium
١٠-price Taker
١١-Technological aliffusion(انتشار تکنولوژي)
١٢-Identical
١٣-Assymetric
١٤-Realized in kind gross rate of retarn
١٥-Expected life time utility Maximization
١٦-Discount factor (ضریب تنزیل)

۱۷ - به عبارت دیگر E، امید ریاضی بردار مذکور می‌باشد.

١٨- Interior solution(جواب غیر مرزي)
١٩-Market clearing condition
٢٠-Wage map
٢١-Strictly position

۲۲ -به عبارت دیگرE، امید ریاضی توزیع مشترک ۶۴ می‌باشد.

٢٣-Technologies diffusion
٢٤-The Range of admissible wage rates
٢٥-monotone increasing
٢٦-fixed point
٢٧-Realized price system
٢٨-effective capital input
٢٩-deterministic
٣٠-Real linkage

منابع:

1-AGHION, P., AND P. HOWITT *Endogenous Growth Theory*. Cambridge: MIT Press. 19982-
2-EVENSON, R. E., AND Y. KISLEV “A Stochastic Model of ApplieResearch,” *Journal of Political Economy,* 84: 256-281. 1975
3-JONES, C. I. “R&D-Based Models of Economic Growth,” *Journal of Political Economy,* 103: 759-784. 1995b
4-KORTUM, S. “Research, Patenting, and Technological Change,” *Econometrica,* 65, (November): 1389-1419. 1997
5-ROMER, P. M. “Increasing Return and Long Run Growth,” *Journal of Political Economy,* 94, (October): 1002-1037. 1986
(Winter): 3-22.6-ROMER, P. M. “The origin of Endogenous Growth,” *Journal of Economic Perspective,* 8, 1994
7-SEGERSTROM, P. S. “Endogenous Growth without Scale Effects,” *American Economic Review,* 88, (December): 1290-1310. 1998
8-UZAWA, H. “Optimal Technical Change in an Aggregate Model of Economic Growth,” *International Economic Review,* 6, (January): 18-31. 1965
9-YOUNG, A. “Growth without Scale Effects,” *Journal of Political Economy,* 106, (February): 41-63. 1998